

---

**Avancerede bjælkeelementer med  
tværsnitsdeformation**  
**Advanced beam element with distorting cross sections**  
Kandidatprojekt

---

Michael Teilmann Nielsen, s062508

---

Foråret 2012  
Under vejledning af Jeppe Jönsson, DTU  
Danmarks Tekniske Universitet  
Institut for byggeri og anlæg  
Fra 30-01-2012 til 31-07-2012



## **Forord**

Dette projekt er udført i overensstemmelse med gældende regelsæt for kandidat afgangsprøve ved Danmark Tekniske Universitet, DTU. Projektet er udført under instituttet for Byggeri og Anlæg, BYG°DTU i perioden fra d. 30-01-2012 til d. 31-07-2012. Projektet er normeret til 30 ETCS point.

Jeg vil gerne sige tak til min vejleder Jeppe Jönsson, professor og sektionsleder, for ideoplæg, råd og vejledning under projektfasen.

Michael Teilmann Nielsen

Lyngby  
Juli, 2012



## Resumé

Dette projekt omhandler udvikling og test af et avanceret tyndvægget bjælkeelement. Projektet tager udgangspunkt i et allerede eksisterende bjælkeelement som i blandt flere er beskrevet i artiklen, "A distortional semi-discretized thin-walled beam element; M.J.Andreassen, J.Jönsson".

I deres bjælkeelement er der ikke taget højde for forskydningsdeformation, så formålet ved projektet er at videreudvikle bjælkeelementet, så forskydningsdeformation også medtages. Ved at have forskydningsdeformation med, vil resultaterne blive bedre for analyser af korte bjælker.

Udviklingen af bjælkeelementet tager udgangspunkt i en semi-diskretiseret teori, hvor tværsnittet af bjælkeelementet er opbygget af indre elementer. Ud fra dette opstilles en energiformulering, som er baseret på et antaget flytningsfelt for elementerne. Flytningsfeltet for elementerne tager udgangspunkt fra Euler-Bernoulli teori, men hvor denne udvides, således at forskydningsdeformation også er mulig.

Ud fra energiformuleringen og på baggrund af diskretiseringen af tværsnittet opstilles styrende homogene differentiaalligninger, og ved løsning af disse bestemmes de naturlige formfunktioner. For hver naturlig formfunktion bestemmes ligeledes en løsningsfunktion på langs af bjælkeelementet. Herved fås et semi-diskretiseret bjælkeelement, hvor selve tværsnittet er diskretiseret, mens der anvendes analytiske løsninger på langs af bjælkeelementet. Ud fra disse løsninger opstilles til sidst en elementmetodeformulering.

I projektet er der også fremkommet inhomogene differentiaalligninger ved, at påføre en ydrelast på bjælkeelementet. Disse er blevet løst og der opstilles en elementmetodeformulering.

Ud fra flytningerne kan tøjningerne bestemmes, og herved kan spændingerne bestemmes igennem de konstitutive ligninger, hvor det antages, at materialet er lineært elastisk. I dette projekt anvendes stålets materialeegenskaber.

I projektet er sådant bjælkeelement blevet udviklet, således at der også bliver taget højde for forskydningsdeformation. Igennem flere tests har det vist sig, at for denne formulering bliver forskydningspændingerne kun udregnet tilnærmet.



## Summary

This project deals with development and testing of an advanced thin-walled beam element. The project is based on an already existing beam element, which among several is described in the article "A distortional semi-discretized thin-walled beam element; M.J.Andreassen, J.Jönsson".

For their beam element shear deformation is not taken into account. Therefore the purpose of this project is to develop the beam element; so that shear deformation is also included. By having shear deformation included, the results will be better for analysis of short beams.

The development of the beam element is based on a semi-discretized theory, where the cross-section of the beam element is made up by single elements. From this an energy formulation is established, which is based on an assumed displacement field of the elements. The displacement field of the elements is based on the Euler-Bernoulli theory, in which the theory is extended so that shear deformation is also possible.

Based on the energy formulation and the discretization of the cross-section, governing homogeneous differential equations has been established and by solving these, the natural mode shapes are determined. For each mode shape a solution along the beam element is found. This gives a semi-discretized beam element, where the cross section is discretized, while analytical solutions are used along the beam element. From these a finite element formulation is presented.

In the project inhomogeneous differential equations has also been found by adding an outer load on the beam element. These have been solved and a finite element formulation is presented.

From the displacement of the beam element the strains are determined and hereby the stresses can be determined through the constitutive equations, where it is assumed that the material is linearly elastic. In this project the material properties for steel have been used.

In this project a beam element has been developed, which also takes into account shear deformation. Through several tests it has been proved that the shear stresses only are determined as an approximation.